حل نماذج الوزارة في الجبر والهندسة الفراغية

للصف الثالث الثانوي (٢٠٢٠)

النموذج الثاني

(١) عدد طرق توزيع ٨ جوائز مختلفة بالتساوي على ٤ طلاب يساوي ...

أ) ١١٢ ب) ٢٥٢٠ ج) ٢٢٤ د) ١٦٥

الحل

يختار الطالب الأول جائزتين من بين ٨

و // // الثاني // // ٦

و // // الثالث // // ٤

و // // الرابع الجائزتين الأخيرتين

ومن قاعدة الضرب لمبدأ العد:

عدد الطرق = $^{8}ق_{2} \times {}^{6}ق_{2} \times {}^{4}ق_{2} \times {}^{2}ق_{2}$

= ٢٨ × ١٥ × ٦ × ١

= ٢٥٢٠ طريقة

---

(٢) إذا كان $^{س+ص}ل_{ص} = ٢١٠$ ، $^{ص-٣}ق_{٣} = ٣٥$

فإن $\lfloor{٢س-ص}$ = ...

أ) ٥ ب) ١٠ ج) ٢ د) ١

الحل

$^{س+ص}ل_{ص} = ٢١٠ = ١٥ \times ١٤ = {}^{١٥}ل_{٢}$

⇐ س + ص = ١٥ —— (١)

$^{ص-٣}ق_{٣} = ٣٥ = {}^{٧}ق_{٣}$ (باستخدام الحاسبة)

⇐ ص − ٣ = ٧ ∴ ص = ١٠

من (١): س + ١٠ = ١٥ ⇐ س = ٥

$\lfloor{٢س-ص} = \lfloor{٢\times٥-١٠} = \lfloor{٠} = ١$

---

(٣) إذا كانت:

$س^2 + ص^2 + ع^2 - ٤س - ٦ص - ٨ع + ٤ = ٠$

هي معادلة كرة مركزها م وطول نصف قطرها نق فإن ...

أ) م(−٢، −٣، −٤) ، نق = ٥ وحدات

ب) م(٢، ٣، ٤) ، نق = ٢٥ وحدة

ج) م(−٢، −٣، −٤) ، نق = ٢٥ وحدة

د) م(٢، ٣، ٤) ، نق = ٥ وحدات

الحل

م = $\left(\frac{-\text{معامل س}}{٢} ، \frac{-\text{معامل ص}}{٢} ، \frac{-\text{معامل ع}}{٢}\right)$

= (٢، ٣، ٤)

نق = $\sqrt{ل^2 + م^2 + ن^2 - د}$

= $\sqrt{٤ + ٩ + ١٦ - ٤}$

∴ نق = ٥ وحدات طول.

---

(٤) ضع العدد $ع = \frac{-٨}{١ + \sqrt{٣}ت}$ في الصورة المثلثية ثم أوجد جذريه التربيعيين في الصورة الأسية

الحل

$ع = \frac{-٨}{١+\sqrt{٣}ت} \times \frac{١-\sqrt{٣}ت}{١-\sqrt{٣}ت} = \frac{-٨(١-\sqrt{٣}ت)}{١+٣}$

$= -٢(١ - \sqrt{٣}ت)$

$ل = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{٤ + ٤\times٣} = ٤$ | س = −٢ ، ص = ٢√٣

θ ∈ الربع الثاني

∴ $θ = ١٨٠° + ظا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right) = ١٨٠° + ظا^{-1}(-\sqrt{٣})$

$θ = ١٢٠° = \frac{٢π}{٣}$

∴ $ع = ٤\left(جتا \frac{٢π}{٣} + ت جا \frac{٢π}{٣}\right)$

وهي الصورة المثلثية للعدد ع

تابع الحل

∴ $ع = ٤ هـ^{\frac{٢\pi}{٣} ت}$

$\sqrt{ع} = \sqrt{٤}\ هـ^{\frac{\frac{٢\pi}{٣} + ٢\pi ك}{٢} ت}$

، ك = ٠ ، −١

∴ الجذران التربيعيان هما $٢ هـ^{\frac{\pi}{٣} ت}$ ، $٢ هـ^{\frac{-٢\pi}{٣} ت}$

(٤-ب) أثبت أن: $جتا^{٣} هـ = \frac{١}{٤} (جتا ٣هـ + ٣ جتا هـ)$

الحل: من نظرية ديموافر:

$(جتا هـ + ت جا هـ)^{٣} = جتا ٣هـ + ت جا ٣هـ$ ①

ومن نظرية ذي الحدين:

$(جتا هـ + ت جا هـ)^{٣}$

$= جتا^{٣} هـ + {}^{٣}ق_{١} (ت جا هـ) جتا^{٢} هـ + {}^{٣}ق_{٢} (ت جا هـ)^{٢} جتا هـ + (ت جا هـ)^{٣}$

$= جتا^{٣} هـ + ٣ت جا هـ جتا^{٢} هـ - ٣ جا^{٢} هـ جتا هـ - ت جا^{٣} هـ$

$= (جتا^{٣} هـ - ٣ جا^{٢} هـ جتا هـ) + ت (٣ جا هـ جتا^{٢} هـ - جا^{٣} هـ)$ (٢)

من ① ، ② :

$جتا^{٣} هـ - ٣ جا^{٢} هـ جتا هـ = جتا ٣هـ$

∴ $جتا^{٣} هـ = جتا ٣هـ + ٣ جتا هـ (١ - جتا^{٢} هـ)$

$= جتا ٣هـ + ٣ جتا هـ - ٣ جتا^{٣} هـ$

∴ $٤ جتا^{٣} هـ = جتا ٣هـ + ٣ جتا هـ$

∴ $جتا^{٣} هـ = \frac{١}{٤} (جتا ٣هـ + ٣ جتا هـ)$

---

(٥) في مفكوك: $(١+س)^{ن} = ١ + أ_{١} س + أ_{٢} س^{٢} + أ_{٣} س^{٣} + ... + أ_{ن} س^{ن}$

إذا كان $\frac{أ_{٢} + أ_{٣}}{أ_{٢}} = ٣$ فإن: ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

---

(٢)

الحل (أ): ∵ $\frac{أ_{٣} + أ_{٢}}{أ_{٢}} = ٣$

∴ $١ + \frac{أ_{٣}}{أ_{٢}} = ٣$

∴ $\frac{{}^{ن}ق_{٣}}{{}^{ن}ق_{٢}} = ٢$

∴ $\frac{ن - ٣ + ١}{٣} = ٢$

ن − ٢ = ٦ ⇐ ن = ٨

---

(٦) إذا كان أ = (−٢ ، ٤ ، ٦) ، ب = (٠ ، ل ، ٣) حيث $ل \in ص^{+}$ ، ||أب|| = ٧ وحدات فإن: قيمة ل = ...

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٤

الحل (أ): أب = ب − أ = (٠ ، ل ، ٣) − (−٢ ، ٤ ، ٦)

∴ أب = (٢ ، ل − ٤ ، −٣)

∵ ||أب|| = ٧ وحدات طول

∴ $\sqrt{(٢)^{٢} + (ل-٤)^{٢} + (-٣)^{٢}} = ٧$

بتربيع الطرفين

$٤ + (ل - ٤)^{٢} + ٩ = ٤٩$

∴ $(ل - ٤)^{٢} = ٣٦$

ل − ٤ = ٦ ، أو ل − ٤ = −٦

ل = ١٠ ، أو ل = −٢ $\notin ص^{+}$ (مرفوض)

---

(٧) إذا كان أ = (٢ ، ١ ، −٢) وكان: أ + ب = أ × ب فإن ب = ...

(أ) (٢ ، −١ ، −٢) (ب) (٢ ، ١ ، −٢)

(جـ) (−٢ ، −١ ، ٢) (د) (−٢ ، −١ ، ٣)

الحل:

∵ أ⃗ + ب⃗ = أ⃗ × ب⃗

ومعلوم أن أ⃗ × ب⃗ ⊥ مستوى كل من أ⃗ ، ب⃗

∴ أ⃗ × ب⃗ = أ⃗ + ب⃗ = ٠⃗

∴ ب⃗ = −أ⃗ = (−٢ ، −١ ، ٢)

٨-أ) إذا كان أ⃗ ، ب⃗ ∈ ح³ فأثبت أن:

‖أ⃗ × ب⃗‖² + ‖أ⃗ · ب⃗‖² = ‖أ⃗‖² ‖ب⃗‖²

الحل:

‖أ⃗ × ب⃗‖² + ‖أ⃗ · ب⃗‖²

= (‖أ⃗‖ ‖ب⃗‖ جاهـ)² + (‖أ⃗‖ ‖ب⃗‖ جتاهـ)²

حيث هـ قياس الزاوية بين المتجهين

= ‖أ⃗‖² ‖ب⃗‖² (جا²هـ + جتا²هـ)

= ‖أ⃗‖² ‖ب⃗‖²

∴ الطرفان متساويان.

٨-ب) إذا كان: أ⃗ = (جتاهـ ، لو₂ س ، جاهـ)

، ب⃗ = (٢ جتاهـ ، لو₃ ٢٧ ، ٢ جاهـ)

وكان أ⃗ · ب⃗ = ١١ فأوجد قيمة س

حيث هـ قياس الزاوية بين المتجهين أ⃗ ، ب⃗

الحل: (٢ جتاهـ ، لو₂ س ، جاهـ) · (جتاهـ ، لو₃ ٢٧ ، ٢ جاهـ)

= ١١

∴ ٢ جتا²هـ + لو₂ س × لو₃ ٢٧ + ٢ جا²هـ = ١١

∴ ٣ لو₂ س + ٢ (جتا²هـ + جا²هـ) = ١١

∴ ٣ لو₂ س = ١١ − ٢ = ٩

بالقسمة ÷ ٣

∴ لو₂ س = ٣   ∴ س = ٢³

∴ س = ٨

---

٩) مرافق العدد ١ + ω هو ...

(أ) ١ − ω   (ب) −ω²   (جـ) ١ + ω²   (د) ١ − ω²

الحل:

مرافق العدد (١ + ω) هو العدد (١ + ω²)

---

١٠) إذا كانت جيوب تمام الاتجاه لمستقيم في الفراغ هي (١/هـ ، ٢/هـ ، −٢/هـ) فإن

(أ) هـ > ٠   (ب) ٠ < هـ < ١

(جـ) هـ = ±٣   (د) −١ ≤ هـ ≤ ١

الحل:

∵ (١/هـ ، ٢/هـ ، −٢/هـ) هي جيوب تمام الاتجاه لمستقيم

∴ (١/هـ)² + (٢/هـ)² + (−٢/هـ)² = ١

∴ (١ + ٤ + ٤) / هـ² = ١

∴ هـ² = ٩

∴ هـ = ±٣

---

١١) إذا كان المستقيمان ل₁: (س+٢)/−١ = (ص+٣)/٣ = (ع+٥)/٢

، ل₂: س/٢ = (ص−٥)/ك = (ع−٦)/م

متعامدين فإن ٣ك + ٢م = ...

(أ) −١   (ب) ٢   (جـ) ٦   (د) ٤

الحل:

ه⃗₁ = (−١ ، ٣ ، ٢) متجه اتجاه ل₁

ه⃗₂ = (٢ ، ك ، م) متجه اتجاه ل₂

∵ ل₁ ⊥ ل₂   ∴ ه⃗₁ · ه⃗₂ = صفر

∴ (−١ ، ٣ ، ٢) · (٢ ، ك ، م) = ٠

∴ −٢ + ٣ك + ٢م = ٠

∴ ٣ك + ٢م = ٢

(١٢) في مفكوك $(س - \frac{1}{س^2})^9$ ، س ≠ ٠ :
أوجد قيمة الحد الخالي من س
ثم أوجد قيمة س التي تجعل مجموع الحدين الأوسطين في المفكوك يساوي صفراً .

(الحل)
$ح_{ر+1} = {}^{9}ق_{ر} (\frac{-1}{س^2})^{ر} (س)^{9-ر}$
$= {}^{9}ق_{ر} (-1)^{ر} × س^{-2ر} × س^{9-ر}$
$= {}^{9}ق_{ر} (-1)^{ر} × س^{9-3ر}$
بفرض $9 - 3ر = 0 \Leftarrow ر = 3$
∴ الحد الخالي من س هو :
$ح_4 = {}^{9}ق_{3} (-1)^3 = -84$
رتبتا الحدين الأوسطين $\frac{9+1}{2}$ ، الذي يليه
أي ٥ ، ٦
∴ $ح_5 + ح_6 = 0$
$\Leftarrow \frac{ح_6}{ح_5} = -1$
$\Leftarrow \frac{9-5+1}{5} × (\frac{-1}{س^2} ÷ س) = -1$
$\frac{-1}{س^3} = -1$
∴ $س^3 = 1$ ∴ $س = 1$

---

(١٣) إذا كان $ع_1 = ل_1(جتا θ_1 + ت جا θ_1)$ ، $ع_2 = ل_2(جتا θ_2 + ت جا θ_2)$
وكان $θ_1 + θ_2 = π$ فإن $ع_1 ع_2 = ...$
(أ) $ل_1 ل_2$ (ب) $-ل_1 ل_2$ (ج) $ل_1 ل_2 ت$ (د) $-ل_1 ل_2 ت$

(الحل) $ع_1 ع_2 = ل_1(جتا θ_1 + ت جا θ_1)$
$× ل_2(جتا θ_2 + ت جا θ_2)$
∴ $ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2 [جتا(θ_1+θ_2) + ت جا(θ_1+θ_2)]$
$= ل_1 ل_2 (جتا π + ت جا π)$
$= -ل_1 ل_2$

---

(١٤) إذا كان المستويان : $2س - ص + ك ع = 5$
، $س + ل ص + 4ع = 1$ متوازيين
فإن ك ل = ...
(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ٨ (ج) -٤ (د) -١٦

(الحل) $\overrightarrow{ن_1} = (2 ، -1 ، ك)$ متجه اتجاه العمودي على المستوى الأول
$\overrightarrow{ن_2} = (1 ، ل ، 4)$ متجه اتجاه العمودي على المستوى الثاني
∵ المستويان متوازيان
∴ $\overrightarrow{ن_1} // \overrightarrow{ن_2}$
∴ $\frac{2}{1} = \frac{-1}{ل} = \frac{ك}{4}$
∴ ك ل = -٤

---

(١٥) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ س & ص & ع \\ س^2 & ص^2 & ع^2 \end{vmatrix} = (س-ص)(ص-ع)(ع-س)$$

(الحل) بضرب $ع_1 × -1$ وإضافته إلى كل من $ع_2$ ، $ع_3$

$$∴ Δ = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ س & ص-س & ع-س \\ س^2 & ص^2-س^2 & ع^2-س^2 \end{vmatrix}$$

بإخراج (ص-س) ع.م من $ع_2$
، إخراج (ع-س) ع.م من $ع_3$

$$∴ Δ = (ص-س)(ع-س) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ س & 1 & 1 \\ س^2 & ص+س & ع+س \end{vmatrix}$$

بضرب $ع_2 × -1$ وإضافته إلى $ع_3$

$$∴ Δ = (ص-س)(ع-س) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ س & 1 & 0 \\ س^2 & ص+س & ع-ص \end{vmatrix}$$

وهي صورة مثلثة

$\therefore \Delta = (ص - س)(ع - س)[1 \times 1 \times (ع - ص)]$

$= (س - ص)(ص - ع)(ع - س)$

---

16 أثبت أن المستقيمين:

$\vec{ر}_1 = (1 ، 2 ، 4) + ك_1 (2 ، -1 ، 1)$

$\vec{ر}_2 = (1 ، 1 ، 1) + ك_2 (-2 ، 7 ، 11)$

متعامدان ومتخالفان.

الحل

$\vec{ه}_1 = (2 ، -1 ، 1)$ متجه اتجاه المستقيم $ل_1$

$\vec{ه}_2 = (-2 ، 7 ، 11)$ متجه اتجاه المستقيم $ل_2$

$\vec{ه}_1 \cdot \vec{ه}_2 = (2 ، -1 ، 1) \cdot (-2 ، 7 ، 11)$

$= 2 \times (-2) + (-1) \times 7 + 1 \times 11$

$= -4 - 7 + 11 =$ صفر

$\therefore \vec{ه}_1 \perp \vec{ه}_2$

$\therefore$ المستقيمان متعامدان

ولكي يتقاطع المستقيمان فإن $\vec{ر}_1 = \vec{ر}_2$

$\therefore (1 + 2ك_1 ، 2 - ك_1 ، 4 + ك_1)$

$= (1 - 2ك_2 ، 1 + 7ك_2 ، 1 + 11ك_2)$

$\therefore 1 + 2ك_1 = 1 - 2ك_2 \Leftarrow ك_1 = -ك_2$ (1)

، $2 - ك_1 = 1 + 7ك_2 \Leftarrow ك_1 + 7ك_2 = 1$ (2)

، $4 + ك_1 = 1 + 11ك_2 \Leftarrow -ك_1 + 11ك_2 = 3$ (3)

بحل المعادلتين (2) ، (3) بالجمع $\Leftarrow 18ك_2 = 4$

$\Leftarrow ك_2 = \frac{4}{18} \Leftarrow ك_2 = \frac{2}{9}$

من (2) : $ك_1 + 7 \times \frac{2}{9} = 1 \Leftarrow ك_1 = \frac{-5}{9}$

$\therefore ك_1 \neq -ك_2$

وهذا لا يتفق مع (1) $\therefore$ المستقيمان لا يتقاطعان

$\therefore$ المستقيمان متعامدان ومتخالفان.

---

17 إذا كان $ع = س + ت ص$ فإن:

الجزء الحقيقي للعدد $هـ^{ع}$ هو ....

(أ) $هـ^{س}$ جتا ص (ب) $هـ^{س}$ جا ص

(ج) $هـ^{س}$ (د) جتا ص

الحل

$\because ع = س + ت ص$

$\therefore هـ^{ع} = هـ^{س + ت ص}$

$= هـ^{س} \times هـ^{ت ص}$

$= هـ^{س}$ (جتا ص + ت جا ص)

$\therefore$ الجزء الحقيقي للعدد $هـ^{ع}$ هو $هـ^{س}$ جتا ص

---

18 أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط أ(2 ، -1 ، 0) ، ب(-1 ، 3 ، 4) ، ج(3 ، 0 ، 2)

الحل

(الصورة القياسية) لمعادلة المستوى هي:

$$\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\begin{vmatrix} س - 2 & ص + 1 & ع - 0 \\ -1 - 2 & 3 + 1 & 4 - 0 \\ 3 - 2 & 0 + 1 & 2 - 0 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$\begin{vmatrix} س - 2 & ص + 1 & ع \\ -3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$(س - 2)(8 - 4) - (ص + 1)(-6 - 4) + ع(-3 - 4) = 0$

$4(س - 2) + 10(ص + 1) - 7ع = 0$ (صورة قياسية)

$4س - 8 + 10ص + 10 - 7ع = 0$

$4س + 10ص - 7ع + 2 = 0$

(وهي الصورة العامة)

$(4 ، 10 ، -7) \cdot \vec{ر} = -2$

(وهي الصورة المتجهة)

وهناك حل آخر

حل آخر

مسألة (١٨):

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (-١،٣،٤) - (٢،-١،٠) = (-٣،٤،٤)$

$\overrightarrow{أد} = \overrightarrow{د} - \overrightarrow{أ} = (٣،٠،٢) - (٢،-١،٠) = (١،١،٢)$

$$\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أد} = (-٣،٤،٤) \times (١،١،٢) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٣ & ٤ & ٤ \\ ١ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

$= \overrightarrow{س}(٨-٤) - \overrightarrow{ص}(-٦-٤) + \overrightarrow{ع}(-٣-٤)$

$= ٤\overrightarrow{س} + ١٠\overrightarrow{ص} - ٧\overrightarrow{ع}$

∴ $\overrightarrow{ن} = (٤،١٠،-٧)$ متجه اتجاه عمودي على المستوى المطلوب

الصورة المتجهة: $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

⇐ $(٤،١٠،-٧) \cdot \overrightarrow{ر} = (٤،١٠،-٧) \cdot (٢،-١،٠) = ٨-١٠$

⇐ $(٤،١٠،-٧) \cdot \overrightarrow{ر} = -٢$ ⟵ الصورة المتجهة

⇐ $٤س + ١٠ص - ٧ع + ٢ = ٠$ ⟵ الصورة العامة

، $\overrightarrow{ن} \cdot (\overrightarrow{ر} - \overrightarrow{أ}) = ٠$

⇐ $٤(س-٢) + ١٠(ص+١) - ٧(ع-٠) = ٠$

⇐ $٤(س-٢) + ١٠(ص+١) - ٧ع = ٠$ ⟵ الصورة القياسية

(١٩) بين أن النظام:

$٣س + ص + ٤ع = ٠$

$٢س + ٣ص + ٥ع = ٠$

$-س + ٢ص + ع = ٠$

عدداً لانهائياً من الحلول وأوجد الصورة العامة لهذا الحل

الحل: المعادلة المصفوفية للنظام:

$$\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ -١ & ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$$

⇔ $أ\,س = \square$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ -١ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

$= ٣(٣-١٠) - ١\times(٢+٥) + ٤(٤+٣) =$ صفر

، ∵ $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ - ٢ = ٧ \neq ٠$.

∴ ر(أ) = ر(أ*) = ٢ < عدد المجاهيل

∴ للنظام عدد لانهائي من الحلول بخلاف الحل الصفري

بضرب المعادلة الثالثة × ٢ وإضافتها للمعادلة الثانية

∴ $٧ص + ٧ع = ٠$.

نفرض ع = ل ⇐ $ص = -ل$

، من ① $٣س - ل + ٤ل = ٠$

⇐ $س = -ل$

∴ للنظام عدد لانهائي من الحلول على الصورة (-ل، -ل، ل) حيث ل ∈ ح

أو على الصورة (م، م، -م) حيث م ∈ ح